

58. a) Suponga que f es una función par diferenciable sobre $(-\infty, \infty)$. Use razonamiento geométrico para explicar por qué $f'(-x) = -f'(x)$; es decir, que f' es una función impar.
 b) Suponga que f es una función impar diferenciable sobre $(-\infty, \infty)$. Use razonamiento geométrico para explicar por qué $f'(-x) = f'(x)$; es decir, que f' es una función par.
59. Suponga que f es una función diferenciable sobre $[a, b]$ tal que $f(a) = 0$ y $f(b) = 0$. Experimente con gráficas para decidir si la siguiente afirmación es falsa o verdadera: hay un número c en (a, b) tal que $f'(c) = 0$.
60. Trace gráficas de varias funciones f que tengan la propiedad $f'(x) > 0$ para toda x en $[a, b]$. ¿Qué tienen en común éstas?

≡ Problemas con calculadora/SAC

61. Considere la función $f(x) = x^n + |x|$, donde n es un entero positivo. Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de f para $n = 1, 2, 3, 4$ y 5 . Luego use (2) para demostrar que f no es diferenciable en $x = 0$ para $n = 1, 2, 3, 4$ y 5 . ¿Puede demostrar esto para cualquier entero positivo n ? ¿Cuáles son $f'_-(0)$ y $f'_+(0)$ para $n > 1$?

4.3 Derivada de potencias y sumas

■ Introducción La definición de derivada

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (1)$$

tiene la desventaja evidente de ser más bien molesta y cansada de aplicar. Para encontrar la derivada de la función polinomial $f(x) = 6x^{100} + 4x^{35}$ usando la definición anterior *sólo* es necesario hacer malabares con 137 términos en los desarrollos del binomio de $(x+h)^{100}$ y $(x+h)^{35}$. Hay formas más eficaces para calcular derivadas de una función que usar la definición cada vez. En esta sección, y en las secciones que siguen, veremos que hay algunos atajos o **reglas** generales a partir de las cuales es posible obtener las derivadas de funciones como $f(x) = 6x^{100} + 4x^{35}$ literalmente, con un truco de pluma.

En la última sección vimos que las derivadas de las funciones potencia

$$f(x) = x^2, \quad f(x) = x^3, \quad f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$$

eran, a su vez,

$$f'(x) = 2x, \quad f'(x) = 3x^2, \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-1/2}.$$

► Vea los ejemplos 3, 5 y 6 en la sección 4.2.

Si los miembros derechos de estas cuatro derivadas se escriben

$$2 \cdot x^{2-1}, \quad 3 \cdot x^{3-1}, \quad (-1) \cdot x^{-1-1}, \quad \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1},$$

observamos que cada coeficiente corresponde al exponente original de x en f y que el nuevo exponente de x en f' puede obtenerse a partir del exponente anterior al restarle 1. En otras palabras, el patrón para la derivada de la función potencia general $f(x) = x^n$ es

el exponente se escribe como múltiplo

$$(\downarrow)x^{(\uparrow)-1}.$$

el exponente disminuye por uno

(2)

■ Derivada de la función potencia En efecto, el patrón ilustrado en (2) se cumple para cualquier exponente que sea un número real n , y este hecho se planteará como un teorema formal, pero en este momento del curso no se cuenta con las herramientas matemáticas necesarias para demostrar su validez completa. Sin embargo, es posible demostrar un caso especial de esta regla de potencias; las partes restantes de la demostración se proporcionarán en las secciones idóneas más adelante.

Teorema 4.3.1 Regla de potenciasPara cualquier número real n ,

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}. \quad (3)$$

DEMOSTRACIÓN La demostración sólo se presenta para el caso donde n es un entero positivo. A fin de calcular (1) para $f(x) = x^n$ usamos el método de cuatro pasos:

Teorema general del binomio

$$i) f(x+h) = (x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n$$

$$ii) f(x+h) - f(x) = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n - x^n$$

$$= nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n$$

$$= h \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-1}h + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1} \right]$$

$$iii) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{h \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-1}h + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1} \right]}{h}$$

$$= nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-1}h + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1}$$

$$iv) f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[nx^{n-1} + \underbrace{\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-1}h + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1}}_{\text{estos términos} \rightarrow 0 \text{ cuando } h \rightarrow 0} \right] = nx^{n-1}.$$

◀ Vea las Páginas de recursos para un repaso del teorema del binomio.

EJEMPLO 1 Regla de potencias

Diferencie

a) $y = x^7$

b) $y = x$

c) $y = x^{-2/3}$

d) $y = x^{\sqrt{2}}$

Solución Por la regla de potencias (3),

a) con $n = 7$: $\frac{dy}{dx} = 7x^{7-1} = 7x^6$,

b) con $n = 1$: $\frac{dy}{dx} = 1x^{1-1} = x^0 = 1$,

c) con $n = -\frac{2}{3}$: $\frac{dy}{dx} = \left(-\frac{2}{3}\right)x^{(-2/3)-1} = -\frac{2}{3}x^{-5/3} = -\frac{2}{3x^{5/3}}$,

d) con $n = \sqrt{2}$: $\frac{dy}{dx} = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$.

Observe en el inciso b) del ejemplo 1 que el resultado es consistente con el hecho de que la pendiente de la recta $y = x$ es $m = 1$. Vea la FIGURA 4.3.1.

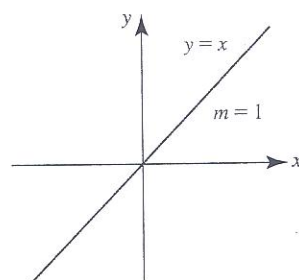


FIGURA 4.3.1 La pendiente de la recta $m = 1$ es consistente con $dy/dx = 1$

Teorema 4.3.2 Regla de la función constanteSi $f(x) = c$ es una función constante, entonces $f'(x) = 0$.

(4)

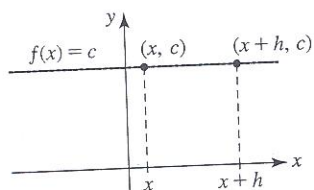


FIGURA 4.3.2 La pendiente de una recta horizontal es 0

DEMOSTRACIÓN Si $f(x) = c$, donde c es cualquier número real, entonces se concluye que la diferencia es $f(x+h) - f(x) = c - c = 0$. Así, por (1),

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

El teorema 4.3.2 tiene una interpretación geométrica evidente. Como se muestra en la FIGURA 4.3.2, la pendiente de la recta horizontal $y = c$ es, por supuesto, cero. Además, el teorema 4.3.2 coincide con (3) en el caso donde $x \neq 0$ y $n = 0$.

Teorema 4.3.3 Regla de la multiplicación por constante

Si c es cualquier constante y f es diferenciable en x , entonces cf es diferenciable en x , y

$$\frac{d}{dx} cf(x) = cf'(x). \quad (5)$$

DEMOSTRACIÓN Sea $G(x) = cf(x)$. Entonces

$$\begin{aligned} G'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} c \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] \\ &= c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = cf'(x). \end{aligned}$$

EJEMPLO 2 Un múltiplo constante

Diferencie $y = 5x^4$.

Solución Por (3) y (5),

$$\frac{dy}{dx} = 5 \frac{d}{dx} x^4 = 5(4x^3) = 20x^3.$$

Teorema 4.3.4 Reglas de suma y diferencia

Si f y g son diferenciables en x , entonces $f+g$ y $f-g$ son diferenciables en x , y

$$\frac{d}{dx} [f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x), \quad (6)$$

$$\frac{d}{dx} [f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x). \quad (7)$$

DEMOSTRACIÓN DE (6) Sea $G(x) = f(x) + g(x)$. Entonces

$$G'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h} \quad \leftarrow \text{reordenando términos}$$

puesto que los límites existen, el límite de una suma es la suma de los límites \rightarrow

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) + g'(x). \end{aligned}$$

El teorema 4.3.4 se cumple para cualquier suma finita de diferenciables. Por ejemplo, si f , g y h son diferenciables en x , entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x) + h(x)] = f'(x) + g'(x) + h'(x).$$

Ya que $f - g$ puede escribirse como una suma, $f + (-g)$, no es necesario demostrar (7) puesto que el resultado se concluye de (6) y (5). Por tanto, el teorema 4.3.4 puede plantearse coloquialmente como:

- La derivada de una suma es la suma de las derivadas.

Derivada de un polinomio Dado que sabemos cómo diferenciar potencias de x y múltiplos constantes de esas potencias, resulta fácil diferenciar sumas de estos múltiplos constantes. La derivada de una función polinomial es particularmente fácil de obtener. Por ejemplo, ahora vemos fácilmente que la derivada de la función polinomial $f(x) = 6x^{100} + 4x^{35}$, mencionada en la introducción de esta sección, es $f'(x) = 600x^{99} + 140x^{34}$.

EJEMPLO 3 Polinomio con seis términos

Diferencie $y = 4x^5 - \frac{1}{2}x^4 + 9x^3 + 10x^2 - 13x + 6$.

Solución Al usar (3), (5) y (6) obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = 4 \frac{d}{dx}x^5 - \frac{1}{2} \frac{d}{dx}x^4 + 9 \frac{d}{dx}x^3 + 10 \frac{d}{dx}x^2 - 13 \frac{d}{dx}x + \frac{d}{dx}6.$$

Puesto que $\frac{d}{dx}6 = 0$ por (4), obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 4(5x^4) - \frac{1}{2}(4x^3) + 9(3x^2) + 10(2x) - 13(1) + 0 \\ &= 20x^4 - 2x^3 + 27x^2 + 20x - 13. \end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Recta tangente

Encuentre una ecuación de una recta tangente a la gráfica $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 7x$ en el punto correspondiente a $x = -1$.

Solución Por la regla de la suma,

$$f'(x) = 3(4x^3) + 2(3x^2) - 7(1) = 12x^3 + 6x^2 - 7.$$

Cuando las f y f' se evalúan en el mismo número $x = -1$, obtenemos

$$\begin{aligned} f(-1) &= 8 && \leftarrow \text{el punto de tangencia es } (-1, 8) \\ f'(-1) &= -13. && \leftarrow \text{la pendiente de la tangente en } (-1, 8) \text{ es } -13 \end{aligned}$$

Con la ecuación punto-pendiente obtenemos una ecuación de la recta tangente

$$y - 8 = -13(x - (-1)) \quad \text{o bien,} \quad y = -13x - 5.$$

Volver a escribir una función En algunas circunstancias, para aplicar una regla de diferenciación de manera eficiente puede ser necesario *volver a escribir* una expresión en una forma alterna. Esta forma alterna a menudo es resultado de algo de manipulación algebraica o una aplicación de las leyes de los exponentes. Por ejemplo, es posible usar (3) para diferenciar las siguientes expresiones, que primero reescribimos usando las leyes de los exponentes

$\frac{4}{x^2}, \frac{10}{\sqrt{x}}, \sqrt{x^3}$	\rightarrow	las raíces cuadradas se vuelven a escribir como potencias	\rightarrow	$\frac{4}{x^2}, \frac{10}{x^{1/2}}, (x^3)^{1/2},$
		luego se vuelve a escribir usando exponentes negativos	\rightarrow	$4x^{-2}, 10x^{-1/2}, x^{3/2},$
		la derivada de cada término usando (3)	\rightarrow	$-8x^{-3}, -5x^{-3/2}, \frac{3}{2}x^{1/2}.$

◀ Vale la pena recordar este análisis.

Una función como $f(x) = (5x + 2)/x^2$ puede escribirse de nuevo como dos fracciones

$$f(x) = \frac{5x + 2}{x^2} = \frac{5x}{x^2} + \frac{2}{x^2} = \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2} = 5x^{-1} + 2x^{-2}.$$

Por la última forma de f , ahora resulta evidente que la derivada f' es

$$f'(x) = 5(-x^{-2}) + 2(-2x^{-3}) = -\frac{5}{x^2} - \frac{4}{x^3}.$$

EJEMPLO 5 Volver a escribir los términos de una función

Diferencie $y = 4\sqrt{x} + \frac{8}{x} - \frac{6}{\sqrt[3]{x}} + 10$.

Solución Antes de diferenciar, los tres primeros términos se vuelven a escribir como potencias de x :

$$y = 4x^{1/2} + 8x^{-1} - 6x^{-1/3} + 10.$$

Así,

$$\frac{dy}{dx} = 4 \frac{d}{dx} x^{1/2} + 8 \frac{d}{dx} x^{-1} - 6 \frac{d}{dx} x^{-1/3} + \frac{d}{dx} 10.$$

Por la regla de potencias (3) y (4) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 4 \cdot \frac{1}{2} x^{-1/2} + 8 \cdot (-1) x^{-2} - 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) x^{-4/3} + 0 \\ &= \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{8}{x^2} + \frac{2}{x^{4/3}}. \end{aligned}$$

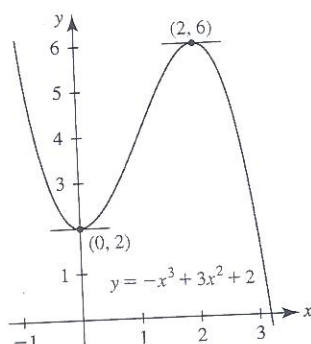


FIGURA 4.3.3 Gráfica de la función en el ejemplo 6

EJEMPLO 6 Tangentes horizontales

Encuentre los puntos sobre la gráfica de $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2$ donde la recta tangente es horizontal.

Solución En un punto $(x, f(x))$ sobre la gráfica de f donde la tangente es horizontal, debemos tener $f'(x) = 0$. La derivada de f es $f'(x) = -3x^2 + 6x$ y las soluciones de $f'(x) = -3x^2 + 6x = 0$ o $-3x(x - 2) = 0$ son $x = 0$ y $x = 2$. Así, los puntos correspondientes son $(0, f(0)) = (0, 2)$ y $(2, f(2)) = (2, 6)$. Vea la FIGURA 4.3.3.

■ **Recta normal** Una **recta normal** en un punto P sobre una gráfica es una recta perpendicular a la recta tangente en P .

EJEMPLO 7 Ecuación de una recta normal

Encuentre una ecuación de la recta normal a la gráfica de $y = x^2$ en $x = 1$.

Solución Puesto que $dy/dx = 2x$, sabemos que $m_{\text{tan}} = 2$ en $(1, 1)$. Por tanto, la pendiente de la recta normal que se muestra en la FIGURA 4.3.4 es el negativo recíproco de la pendiente de la recta tangente; es decir, $m = -\frac{1}{2}$. Por la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta, entonces una ecuación de la recta normal es

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1) \quad \text{o bien,} \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}.$$

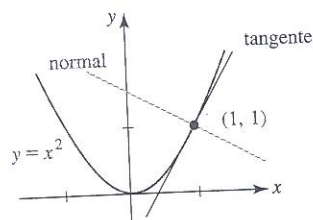


FIGURA 4.3.4 Recta normal en el ejemplo 7

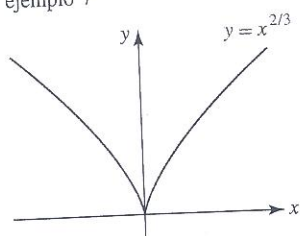


FIGURA 4.3.5 Gráfica de la función en el ejemplo 8

EJEMPLO 8 Tangente vertical

Para la función potencia $f(x) = x^{2/3}$ la derivada es

$$f'(x) = \frac{2}{3} x^{-1/3} = \frac{2}{3x^{1/3}}.$$

Observe que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$ mientras $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$. Puesto que f es continua en $x = 0$ y $|f'(x)| \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow 0$, concluimos que el eje y es una tangente vertical en $(0, 0)$. Este hecho resulta evidente a partir de la gráfica en la FIGURA 4.3.5.

■ **Cúspide** Se dice que la gráfica de $f(x) = x^{2/3}$ en el ejemplo 8 tiene una **cúspide** en el origen. En general, la gráfica de una función $y = f(x)$ tiene una cúspide en un punto $(a, f(a))$ si f es continua en a , $f'(x)$ tiene signos opuestos a cualquier lado de a , y $|f'(x)| \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow a$.

■ **Derivadas de orden superior** Hemos visto que la derivada $f'(x)$ es una función derivada de $y = f(x)$. Al diferenciar la primera derivada obtenemos otra función denominada **segunda derivada**, que se denota por $f''(x)$. En términos del símbolo de operación d/dx , la segunda derivada con respecto a x la definimos como la función que se obtiene al diferenciar dos veces consecutivas a $y = f(x)$:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)$$

La segunda derivada suele denotarse por los símbolos

$$f''(x), \quad y'', \quad \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad \frac{d^2}{dx^2} f(x), \quad D^2, \quad D_x^2$$

EJEMPLO 9 Segunda derivada

Encuentre la segunda derivada de $y = \frac{1}{x^3}$.

Solución Primero se simplifica la ecuación al escribirla como $y = x^{-3}$. Luego, por la regla de potencias (3), tenemos

$$\frac{dy}{dx} = -3x^{-4}.$$

La segunda derivada se obtiene al diferenciar la primera derivada

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} (-3x^{-4}) = -3(-4x^{-5}) = 12x^{-5} = \frac{12}{x^5}.$$

Si se supone que todas las derivadas existen, es posible diferenciar una función $y = f(x)$ tantas veces como se quiera. La **tercera derivada** es la derivada de la segunda derivada; la **cuarta derivada** es la derivada de la tercera derivada, y así sucesivamente. Las derivadas tercera y cuarta se denotan por $d^3 y/dx^3$ y $d^4 y/dx^4$, y se definen como

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) \quad \text{y} \quad \frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^3 y}{dx^3} \right).$$

En general, si n es un entero positivo, entonces la **n -ésima derivada** se define como

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right).$$

Otras notaciones para las primeras derivadas n son

$$\begin{aligned} &f'(x), \quad f''(x), \quad f'''(x), \quad f^{(4)}(x), \quad \dots, \quad f^{(n)}(x), \\ &y', \quad y'', \quad y''', \quad y^{(4)}, \quad \dots, \quad y^{(n)}, \\ &\frac{d}{dx} f(x), \quad \frac{d^2}{dx^2} f(x), \quad \frac{d^3}{dx^3} f(x), \quad \frac{d^4}{dx^4} f(x), \quad \dots, \quad \frac{d^n}{dx^n} f(x), \\ &D, \quad D^2, \quad D^3, \quad D^4, \quad \dots, \quad D^n, \\ &D_x, \quad D_x^2, \quad D_x^3, \quad D_x^4, \quad \dots, \quad D_x^n. \end{aligned}$$

Observe que la notación “prima” se usa para denotar sólo las tres primeras derivadas; después de eso se usa el supraíndice $y^{(4)}$, $y^{(5)}$, y así sucesivamente. El **valor de la n -ésima derivada** de una función $y = f(x)$ en un número a se denota por

$$f^{(n)}(a), \quad y^{(n)}(a) \quad \text{y} \quad \left. \frac{d^n y}{dx^n} \right|_{x=a}.$$

EJEMPLO 10 Quinta derivada

Encuentre las cinco primeras derivadas de $f(x) = 2x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 5x$.

Solución Tenemos

$$f'(x) = 8x^3 - 18x^2 + 14x + 5$$

$$f''(x) = 24x^2 - 36x + 14$$

$$f'''(x) = 48x - 36$$

$$f^{(4)}(x) = 48$$

$$f^{(5)}(x) = 0.$$

Después de reflexionar un momento, usted debe convencerse que al derivar la $(n + 1)$ veces una función polinomial de grado n el resultado es cero.

$\frac{d}{dx}$ NOTAS DESDE EL AULA

- i) En los diversos contextos de ciencias, ingeniería y negocios, las funciones a menudo se expresan en otras variables distintas a x y y . De manera correspondiente, la notación de la derivada debe adaptarse a los nuevos símbolos. Por ejemplo,

Función

$$v(t) = 32t$$

$$A(r) = \pi r^2$$

$$r(\theta) = 4\theta^2 - 3\theta$$

$$D(p) = 800 - 129p + p^2$$

Derivada

$$v'(t) = \frac{dv}{dt} = 32$$

$$A'(r) = \frac{dA}{dr} = 2\pi r$$

$$r'(\theta) = \frac{dr}{d\theta} = 8\theta - 3$$

$$D'(p) = \frac{dD}{dp} = -129 + 2p.$$

- ii) Quizá se pregunte qué interpretación puede darse a las derivadas de orden superior. Si piensa en términos de gráficas, entonces f'' proporciona la pendiente de las rectas tangentes a la gráfica de la función f' ; f''' proporciona la pendiente de las rectas tangentes a la gráfica de la función f'' , y así sucesivamente. Además, si f es diferenciable, entonces la primera derivada f' proporciona la razón de cambio instantánea de f . En forma semejante, si f' es diferenciable, entonces f'' proporciona la razón de cambio instantánea de f' .

4.3

DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-10.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-8, encuentre dy/dx .

1. $y = -18$

3. $y = x^9$

5. $y = 7x^2 - 4x$

7. $y = 4\sqrt{x} - \frac{6}{\sqrt[3]{x^2}}$

2. $y = \pi^6$

4. $y = 4x^{12}$

6. $y = 6x^3 + 3x^2 - 10$

8. $y = \frac{x - x^2}{\sqrt{x}}$

En los problemas 9-16, encuentre $f'(x)$. Simplifique.

9. $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - 3x^4 + 9x^2 + 1$

10. $f(x) = -\frac{2}{3}x^6 + 4x^5 - 13x^2 + 8x + 2$

11. $f(x) = x^3(4x^2 - 5x - 6)$

12. $f(x) = \frac{2x^5 + 3x^4 - x^3 + 2}{x^2}$

13. $f(x) = x^2(x^2 + 5)^2$ 14. $f(x) = (x^3 + x^2)^3$
 15. $f(x) = (4\sqrt{x} + 1)^2$ 16. $f(x) = (9 + x)(9 - x)$

En los problemas 17-20, encuentre la derivada de la función dada.

17. $h(u) = (4u)^3$ 18. $p(t) = (2t)^{-4} - (2t^{-1})^2$
 19. $g(r) = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^4}$ 20. $Q(t) = \frac{t^5 + 4t^2 - 3}{6}$

En los problemas 21-24, encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función dada en el valor indicado de x .

21. $y = 2x^3 - 1$; $x = -1$ 22. $y = -x + \frac{8}{x}$; $x = 2$
 23. $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + 2\sqrt{x}$; $x = 4$ 24. $f(x) = -x^3 + 6x^2$; $x = 1$

En los problemas 25-28, encuentre el punto o los puntos sobre la gráfica de la función dada donde la recta tangente es horizontal.

25. $y = x^2 - 8x + 5$ 26. $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$
 27. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ 28. $f(x) = x^4 - 4x^3$

En los problemas 29-32, encuentre una ecuación de la recta normal a la gráfica de la función dada en el valor indicado de x .

29. $y = -x^2 + 1$; $x = 2$ 30. $y = x^3$; $x = 1$
 31. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2$; $x = 4$ 32. $f(x) = x^4 - x$; $x = -1$

En los problemas 33-38, encuentre la segunda derivada de la función dada.

33. $y = -x^2 + 3x - 7$ 34. $y = 15x^2 - 24\sqrt{x}$
 35. $y = (-4x + 9)^2$ 36. $y = 2x^5 + 4x^3 - 6x^2$
 37. $f(x) = 10x^{-2}$ 38. $f(x) = x + \left(\frac{2}{x^2}\right)^3$

En los problemas 39 y 40, encuentre la derivada de orden superior indicada.

39. $f(x) = 4x^6 + x^5 - x^3$; $f^{(4)}(x)$

40. $y = x^4 - \frac{10}{x}$; d^5y/dx^5

En los problemas 41 y 42, determine intervalos para los cuales $f'(x) > 0$ e intervalos para los cuales $f'(x) < 0$.

41. $f(x) = x^2 + 8x - 4$ 42. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

En los problemas 43 y 44, encuentre el punto o los puntos sobre la gráfica de f donde $f''(x) = 0$.

43. $f(x) = x^3 + 12x^2 + 20x$ 44. $f(x) = x^4 - 2x^3$

En los problemas 45 y 46, determine intervalos para los cuales $f''(x) > 0$ e intervalos para los cuales $f''(x) < 0$.

45. $f(x) = (x - 1)^3$ 46. $f(x) = x^3 + x^2$

Una ecuación que contiene una o más derivadas de una función desconocida $y(x)$ se denomina **ecuación diferencial**. En los problemas 47 y 48, demuestre que la función satisface la ecuación diferencial dada.

47. $y = x^{-1} + x^4$; $x^2y'' - 2xy' - 4y = 0$
 48. $y = x + x^3 + 4$; $x^2y'' - 3xy' + 3y = 12$
 49. Encuentre el punto sobre la gráfica de $f(x) = 2x^2 - 3x + 6$ donde la pendiente de la recta tangente es 5.

50. Encuentre el punto sobre la gráfica de $f(x) = x^2 - x$ donde la recta tangente es $3x - 9y - 4 = 0$.
 51. Encuentre el punto sobre la gráfica de $f(x) = x^2 - x$ donde la pendiente de la recta normal es 2.
 52. Encuentre el punto sobre la gráfica de $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x$ donde la recta tangente es paralela a la recta $3x - 2y + 1 = 0$.
 53. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x^3 + 3x^2 - 4x + 1$ en el punto donde el valor de la segunda derivada es cero.
 54. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x^4$ en el punto donde el valor de la tercera derivada es 12.

≡ Aplicaciones

55. El volumen V de una esfera de radio r es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Encuentre el área superficial S de la esfera si S es la razón de cambio instantánea del volumen con respecto al radio.
 56. Según el físico francés Jean Louis Poiseuille (1799-1869), la velocidad v del flujo sanguíneo en una arteria cuya sección transversal circular es constante de radio R es $v(r) = (P/4\mu l)(R^2 - r^2)$, donde P , μ y l son constantes. ¿Cuál es la velocidad del flujo sanguíneo en el valor de r para el cual $v'(r) = 0$?
 57. La energía potencial de un sistema masa-resorte cuando el resorte se estira una distancia de x unidades es $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$, donde k es la constante del resorte. La fuerza ejercida sobre la masa es $F = -dU/dx$. Encuentre la fuerza si la constante del resorte es 30 N/m y la cantidad de estiramiento es $\frac{1}{2}$ m.
 58. La altura s por arriba del nivel del suelo de un proyectil en el instante t está dada por

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0,$$

donde g , v_0 y s_0 son constantes. Encuentre la razón de cambio instantánea de s con respecto a t en $t = 4$.

≡ Piense en ello

En los problemas 59 y 60, el símbolo n representa un entero positivo. Encuentre una fórmula para la derivada dada.

59. $\frac{d^n}{dx^n} x^n$ 60. $\frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{x}$

61. A partir de las gráficas de f y g en la FIGURA 4.3.6, determine qué función es la derivada de la otra. Explique verbalmente su decisión.

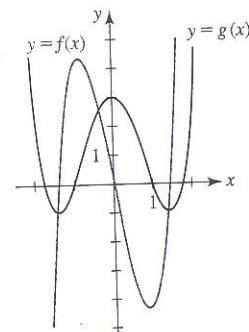


FIGURA 4.3.6 Gráficas para el problema 61

62. A partir de la gráfica de la función $y = f(x)$ dada en la FIGURA 4.3.7, trace la gráfica de f' .

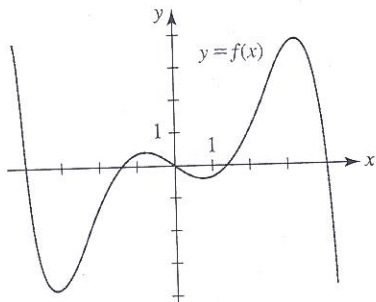


FIGURA 4.3.7 Gráfica para el problema 62

63. Encuentre una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ tal que $f(-1) = -11$, $f'(-1) = 7$ y $f''(-1) = -4$.
64. Se dice que las gráficas de $y = f(x)$ y $y = g(x)$ son **ortogonales** si las rectas tangentes a cada gráfica son perpendiculares en cada punto de intersección. Demuestre que las gráficas de $y = \frac{1}{8}x^2$ y $y = -\frac{1}{4}x^2 + 3$ son ortogonales.
65. Encuentre los valores de b y c de modo que la gráfica de $f(x) = x^2 + bx$ tenga la recta tangente $y = 2x + c$ en $x = -3$.
66. Encuentre una ecuación de la(s) recta(s) que pasa(n) por $(\frac{3}{2}, 1)$ y es (son) tangente(s) a la gráfica de $f(x) = x^2 + 2x + 2$.
67. Encuentre los puntos de la gráfica de $f(x) = x^2 - 5$ tal que la línea tangente a los puntos interseque al eje en $(-3, 0)$.
68. Encuentre el o los puntos sobre la gráfica de $f(x) = x^2$ tal que la recta tangente interseque al eje y en $(0, -2)$.
69. Explique por qué la gráfica de $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3$ no tiene recta tangente con pendiente -1 .
70. Encuentre coeficientes A y B de modo que la función $y = Ax^2 + Bx$ satisfaga la ecuación diferencial $2y'' + 3y' = x - 1$.
71. Encuentre valores de a y b tales que la pendiente de la tangente a la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx$ en $(1, 4)$ sea -5 .
72. Encuentre las pendientes de todas las rectas normales a la gráfica de $f(x) = x^2$ que pasan por el punto $(2, 4)$. [Sugerencia: Elabore una figura y observe que en $(2, 4)$ sólo hay una recta normal.]
73. Encuentre un punto sobre la gráfica de $f(x) = x^2 + x$ y un punto sobre la gráfica de $g(x) = 2x^2 + 4x + 1$ donde las rectas tangentes son paralelas.
74. Encuentre un punto sobre la gráfica de $f(x) = 3x^5 + 5x^3 + 2x$ donde la recta tangente tiene la menor pendiente posible.

75. Encuentre las condiciones sobre los coeficientes a , b y c de modo que la gráfica de la función polinomial

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

tenga exactamente una tangente horizontal. Exactamente dos tangentes horizontales. Ninguna tangente horizontal.

76. Sea f una función diferenciable. Si $f'(x) > 0$ para toda x en el intervalo (a, b) , trace gráficas posibles de f sobre el intervalo. Describa verbalmente el comportamiento de la gráfica de f sobre el intervalo. Repita si $f'(x) < 0$ para toda x en el intervalo (a, b) .
77. Suponga que f es una función diferenciable tal que $f'(x) - f(x) = 0$. Encuentre $f^{(100)}(x)$.

78. Las gráficas de $y = x^2$ y $y = -x^2 + 2x - 3$ dada por la FIGURA 4.3.8 muestran que hay dos rectas L_1 y L_2 que son simultáneamente tangentes a ambas gráficas. Encuentre los puntos de tangencia de ambas gráficas. Encuentre una ecuación para cada recta tangente.

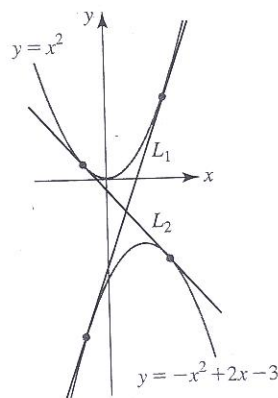


FIGURA 4.3.8 Gráficas para el problema 78

≡ Problemas con calculadora/SAC

79. a) Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de $f(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - 2$.
- b) Evalúe $f''(x)$ en $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ y $x = 4$.
- c) A partir de los datos del inciso b), ¿observa alguna relación entre la forma de la gráfica de f y los signos algebraicos de f'' ?
80. Use una calculadora o un sistema algebraico computacional para obtener la gráfica de las funciones dadas. Por inspección de las gráficas, indique dónde cada función puede no ser diferenciable. Encuentre $f'(x)$ para todos los puntos donde f es diferenciable.
- a) $f(x) = |x^2 - 2x|$ b) $f(x) = |x^3 - 1|$

4.4 Derivada de productos y cocientes

■ **Introducción** Hasta el momento sabemos que la derivada de una función constante y una potencia de x son, a su vez:

$$\frac{d}{dx} c = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}. \quad (1)$$